Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

5 КЛАСС

1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 12 так, чтобы любые два соседних числа отличались или на 2, или на 3?

2. У Гены есть 50 ящиков, пронумерованных числами от 1 до 50. Из них 49 пусты, а в одном лежат апельсины. Чебурашка получит апельсины, если отгадает, в каком из ящиков они лежат. Для этого он может написать пачку записок с вопросами, требующими ответа «да» или «нет». Гена перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Как узнать наверняка, в каком из ящиков лежат апельсины? Какое наименьшее количество записок для этого нужно?

3. Можно ли клетчатую доску 5×5 замостить плитками 1×3 и 1×4?

4. На столе выложены в ряд игрушки четырёх цветов: красного, синего, зелёного, жёлтого. Известно, что для любых двух различных цветов найдутся две игрушки этих цветов, расположенные рядом. Какое наименьшее число игрушек могло быть выложено?

5. Можно ли таблицу 2×4 заполнить натуральными числами от 1 до 8 так, чтобы суммы чисел в строках были равны между собой, и суммы чисел в столбцах были равны между собой?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

6 КЛАСС

1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 16 так, чтобы любые два соседних числа отличались или на 2, или на 3?

2. Сколько можно составить различных равнобедренных треугольников с целочисленными сторонами, периметр которых равен 100?

3. За завтраком 7 гномов сидели за круглым столом. За обедом они хотят сесть за этот же стол так, чтобы количество сидящих между каждыми двумя гномами поменялось. Получится ли у них это сделать?

4. На столе выложены в ряд игрушки пяти цветов: красного, синего, зелёного, жёлтого, белого. Известно, что для любых двух различных цветов найдутся две игрушки этих цветов, расположенные рядом. Какое наименьшее число игрушек могло быть выложено?

5. Можно ли в квадрате 5×5 покрасить 8 клеток так, чтобы у каждой покрашенной клетки оказалось ровно 3 непокрашенных соседних клетки? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

7 КЛАСС

1. Имеется 7 прямоугольных плиток размеров 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6, 1×7. Можно ли, используя все эти плитки, сложить из них два прямоугольника одинаковой площади, но разного периметра?

2. Натуральное число назовём хорошим, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество хороших чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

3. В коробке лежат 30 карандашей красного и синего цвета. Среди любых 17 карандашей есть хотя бы один красный, а среди любых 15 карандашей есть хотя бы один синий. Сколько красных карандашей в коробке?

4. Чему равна длина самого короткого пути жука вдоль ребер куба со стороной 1 см, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине?

5. Можно ли таблицу 3×5 заполнить натуральными числами от 1 до 15 так, чтобы суммы чисел в строках были равны между собой, и суммы чисел в столбцах были равны между собой?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

8 КЛАСС

1. Какое наибольшее простое число нельзя представить в виде суммы двух составных?

2. Пин-код телефона состоит из 4 цифр (и может начинаться с нуля: например, 0951). Петя называет «счастливыми» такие пин-коды, у которых сумма крайних цифр равна сумме средних, например 7351: 7+1=3+5. В своем телефоне он использует только «счастливые» пин-коды. Петя говорит, что даже если забудет одну цифру (но будет помнить её позицию), то он легко её восстановит. А если он забудет две цифры (но будет помнить их позиции), то ему придется перебрать лишь небольшое количество пин-кодов.

   Сколько пин-кодов придется перебрать Пете в худшем случае?

3. Числа 1, 22, 41, 58 обладают тем свойством, что сумма любых трёх из них — точный квадрат. Можно ли придумать ещё какую-нибудь четвёрку попарно различных натуральных чисел с таким свойством, которая не была бы пропорциональна уже предъявленной?

4. Какие значения может принимать a, если $|a+b| \leq 1$ и $|a-3b| \leq 2$?

5. Рассмотрим клетчатый квадрат размером 10×10, проведём в нем диагональ из левого нижнего угла в правый верхний и выкинем все клетки, лежащие выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить оставшуюся фигуру на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

9 КЛАСС

1. В результате реструктуризации импорта на складе торговой сети овощей стало на 40% больше, а фруктов — на 20% меньше. Требуется определить, сколько процентов фруктов стало на складе, если до реструктуризации их было 20%.

2. В чемпионате России по футболу участвуют 18 команд. За победу в матче даётся 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. В первом круге каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Оказалось, что все команды набрали разное количество очков. Могла ли команда, занявшая в первом круге второе место, набрать 49 очков?

3. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найти наименьшую дробь, большую, чем $\frac{5}{6}$.

4. В окружность радиуса 5 вписан четырёхугольник $ABCD$, у которого угол D прямой, $AB : BC = 3 : 4$. Найти периметр четырёхугольника $ABCD$, если его площадь равна 44.

5. На доске написано семь натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Известно, что сумма всех написанных чисел больше 100. Всегда ли можно указать три числа из семи, сумма которых больше 50?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

10 КЛАСС

1. Дано 17 натуральных чисел, среди которых никакое не делится на 210. Всегда ли можно указать 5 из этих чисел, произведение которых не будет делиться на 210?

2. Есть пять монет, из них две фальшивые, которые весят больше настоящей. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивые монеты.

3. Доказать, что при $n > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

4. Дан равнобедренный треугольник ABC с вершиной B и углом при основании 41°. Точка M такова, что отрезки AM и BC пересекаются, угол AMB равен 15°, угол AMC равен 49°. Найти величину угла MAC.

5. В клетки квадрата 3×3 нужно вписать девять попарно различных натуральных чисел так, чтобы они были не больше n, и чтобы произведения чисел во всех строках и столбцах были одинаковы. При каком наименьшем n это возможно?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

11 КЛАСС

1. Верно ли, что для любого x верно строгое неравенство

$$5\sin 3x + 2\cos 8t + 7 > 0?$$

2. Решить уравнение $(x-1)^4 - x^3 = 17$.

3. Доказать, что число, составленное из 3^n единиц, делится на 3^n.

4. Каков наибольший диаметр шара, если в коробке $24 \times 24 \times 24$ помещается 9 таких шаров?

5. Дан квадрат $ABCD$. Точка E внутри угла CAB такова, что $AE = BD$ и BE перпендикулярно BD. Найти угол BAE.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для решения задачи, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и плохо поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Многие задачи данного тура близки к типовым школьным задачам, поэтому их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Конкретные предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В задачах 1 V-VI классов для полного решения достаточно одного конкретного примера, без объяснения того, как он был получен.

В задаче 2 V класса, при указании способа угадывания за 49 вопросов, без доказательства того, что это число наименьшее, можно давать от 3 до 4 баллов. Просто ответ без объяснений баллами не оценивается.

В задачах 3, 5 V класса достаточно примера замощения.

В задаче 4 V-VI классов, за предъявление примера с 8 (11) игрушками даётся 3 балла, и ещё 4 присуждается за доказательство того, что это значение не может быть уменьшено.

В задаче 2 VI класса за верный ответ без объяснения можно давать до 2 баллов.

В задаче 3 VI класса достаточно верного примера расположения гномов за столом (пример не обязан совпадать с приведённым в решении). То же для задачи 5 VI класса.

В задачах 1, 5 VII класса достаточно правильно найденного примера (описания или рисунка).

В задаче 2 VII класса за верный пример с четырьмя простыми суммами цифр даётся 3 балла. Ещё 4 – за доказательство того, что все пять сумм простыми быть не могут.

В задаче 3 VII класса требуется не только ответ, но и обоснованное рассуждение, почему это так.

В задаче 4 VII класса за правильный ответ можно давать до 3 баллов.

В задаче 1 VIII класса за правильный ответ даётся 1 - 2 балла. Остальное – за обоснование того, почему все большие числа представимы.

В задаче 1 VIII класса за правильный ответ можно давать до 2 баллов. Ещё один балл – за попытки рассмотрения разных случаев.

В задаче 3 VIII класса достаточно верного примера четвёрки чисел (не обязательно такого, как в решении). За попытки исследования можно давать до 2 баллов.

Задаче 4 VIII класса – школьного типа. Она может быть также решена графически. За верный ответ без полного объяснения – до 2 баллов.

В задаче 5 VIII класса за верный ответ даётся 2 балла. За идею удвоения и попытку описания – ещё 2 - 3 балла, если рассуждение представляет ценность.

Задачи 1, 4 IX класса оцениваются по школьным критериям.

В задачах 2, 5 IX класса требуется полное доказательство. Верный ответ баллами не оценивается.

В задаче 3 IX класса нахождение правильного ответа оценивается 3 баллами.

В задаче 1 X класса требуется полное доказателство. За идею использования принципа Дирихле – до 2 баллов.

В задаче 2 X класса требуется предъявить схему взвешиваний и доказать, что она ведёт к ответу

В задаче 3 X класса за установление неравенства для небольших значений n можно давать 1 балл. Также частичные баллы возможны при попытках обосновать монотонность. Способы решения могут быть основаны и на других идеях.

Задача 4 X класса оценивается по школьным критериям.

В задаче 5 X класса до 3 баллов даётся за верный ответ (для $n = 15$), а также 1 - 2 балла можно давать за другие примеры, где n принимает большие значения.

В задаче 1 XI класса за рассмотрение системы равенств – 1 балл. За попытку анализа решений – ещё 1 - 2 балла.

В задаче 2 XI класса за нахождение двух корней даётся до 2 баллов.

В задаче 3 XI класса можно давать до 2 баллов за попытки индуктивного доказательства с верной формулировкой гипотезы.

В задаче 4 XI класса за нахождение верного значения даётся до 3 баллов. При наличии доказательства того, что это значение подходит – ещё 2 балла.

Задача 5 XI класса оценивается по школьным критериям.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

5 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Число 1 может быть расположено только между 3 и 4. Число 2 — между 4 и 5. Получается такая цепочка: 3-1-4-2-5. Рядом с 3 с другой стороны уже не может находиться 5, так как всё замкнётся. Значит, там стоит число 6, и получается 6-3-1-4-2-5. Мы здесь рассмотрели 6 наименьших чисел, а если рассмотреть 6 наибольших, то это даст 7-10-12-9-11-8. Теперь осталось соединить 6 с 8, а 5 с 7, располагая числа по кругу.

2. Ответ: 49 записок.

   Пусть изготовлено m записок. Единственная информация, которая далее может быть извлечена из ответов – это количество ответов "да" и "нет". Положительных ответов может быть 0, 1, ... , m — всего $m+1$ случай. Их должно быть достаточно для того, чтобы различить 50 разных ситуаций — по числу ящиков, в одном из которых находятся апельсины. Отсюда $m+1 \geq 50$, то есть $m \geq 49$.

   Приведём пример с 49 записками. Первая: "верно ли, что номер ящика с апельсинами больше 1?". Вторая: "верно ли, что номер ящика с апельсинами больше 2?". И так далее. Записка номер 49: "верно ли, что номер ящика с апельсинами больше 49?".

   Легко видеть, что количество ответов "да" , увеличенное на единицу, совпадает с номером ящика. Действительно, если апельсины лежат, скажем, в 13-м ящике, то на вопросы из первых 12 записок будет дан ответ "да" , а на все остальные — нет. Это же верно для общего случая. В каком порядке идут ответы, мы не знаем, но по количеству положительных ответов всё легко определяется.

3. Ответ: да, можно.

   Возьмём 4 плитки 1×4 и три плитки 1×3. Расположим их так, как показано на рисунке. Одинаковыми буквами помечены клетки одной и той же плитки.

a	a	a	a	e
b	b	b	b	e
g	f	f	f	e
g	c	c	c	c
g	d	d	d	d

4. Ответ: 8 игрушек.

   Если игрушка какого-то из цветов встречается лишь однажды, то рядом с ней могут лежать игрушки только двух цветов, а не трёх оставшихся. Значит, игрушек любого из цветов не меньше двух, а всего игрушек не меньше 8.

   Пример 8 игрушек легко указать: КСЗЖКЗЖС.

5. Ответ: да, можно.

   Заметим, что сумма всех чисел от 1 до 8 равна 36. Поэтому в каждой из строк сумма должна быть равна 18, а в каждом из столбцов должна быть сумма 9. Один из возможных примеров указан на рисунке:

1	4	6	7
8	5	3	2

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

6 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Число 1 может быть расположено только между 3 и 4. Число 2 — между 4 и 5. Получается такая цепочка: 3-1-4-2-5. Рядом с 3 с другой стороны уже не может находиться 5, так как всё замкнётся. Значит, там стоит число 6, и получается 6-3-1-4-2-5. Справа от 5 можно поставить 7, а слева от 6 число 8, что даст 8-6-3-1-4-2-5-7. Мы здесь рассмотрели 8 наименьших чисел, и по такому же принципу можно рассмотреть 8 наибольших, заменяя в предыдущей цепочке каждое число m на $17 - m$. Это даст 9-11-14-16-13-15-12-10. Теперь осталось соединить 8 с 10, а 7 с 9, располагая числа по кругу.

2. Ответ: 24 треугольника.

   Две стороны треугольника равны, поэтому длина третьей стороны — чётное число. Если это 2, то боковые стороны имеют длину 49. Такой треугольник составить можно. Для длины основания 4 боковые стороны равны 48. И так далее, пока не дойдём до числа 48. Боковые стороны равны 26; такой треугольник можно составить, так как наибольшая сторона меньше суммы двух других. Но 50 и более в качестве длины основания брать уже нельзя, так как две другие стороны в сумме дадут не больше.

   Итого значения длины основания могут быть равны 2, 4, ... , 48 — это 24 варианта. По длине основания, длины боковых сторон определяются однозначно.

3. Ответ: да, получится.

   Удобно занумеровать места от 0 до 6 (остатки от деления на 7): 0123456. Умножим каждую из этих цифр на 2, и если результат больше 7, то заменяем на остаток от деления на 7. Получится такая расстановка: 0246135. Нетрудно проверить, что количество сидящих между любыми двумя гномами меняется.

   Можно также рассаживать гномов на места через одного, что даёт 0415263. Этот пример отличается от предыдущего тем, что каждая цифра умножается не на 2, а на 4, и далее рассматривается остаток.

4. Ответ: 11 игрушек.

   Игрушка каждого цвета должна встретиться как минимум дважды: если она всего одна, то рядом с ней могут встретиться игрушки всего двух цветов, а нужно четыре. Получается, что всего игрушек не меньше 10. Если бы их было ровно 10, то каждая игрушка встречалась бы ровно дважды. Рассмотрим крайнюю слева игрушку. У неё только один сосед, и у второй игрушки такого же цвета не более двух соседей. Итого у игрушек этого цвета по соседству могут быть только три цвета вместо четырёх. Значит, есть третья игрушка этого цвета, и всего их как мимнимум 11.

   Пример с 11 игрушками легко указать: КСЗЖБСЖКЗБК.

5. Ответ: да, можно.

   Один из возможных примеров приведён на рисунке. Покрашенные клетки отмечены символом В.

	В		В	
В				В
В				В
	В		В	

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

7 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Сумма площадей плиток равна 28. Значит, площади прямоугольников должны быть равны 14. Если размер одного равен 1×14, а размер другого 2×7, то периметры равны 30 и 18 соответственно. Такие прямоугольники сложить можно. Второй составляем из плиток 1×1, 1×6, 1×2, 1×5. Из плиток 1×3, 1×4, 1×7, выстроенных в линию, составляем первый прямоугольник.

2. Ответ: 4.

   Пример с четырьмя числами: 197, 198, 199, 200, 201. Суммы цифр: 17, 18, 19, 2, 3. Годится также 199 в качестве первого числа.

   Докажем, что все пять чисел (сумм цифр) простыми оказаться не могут. Среди пяти (и даже среди трёх) последовательных чисел есть хотя бы одно кратное трём. Его сумма цифр кратна 3, и если это простое число, то это 3. Тогда у следующего за ним числа сумма цифр увеличивается на 1, так как число с суммой цифр 3 не оканчивается на 9. Значит, за суммой 3 следует 4, если 3 не последнее. Если же число с суммой цифр 3 самое последнее, то в списке есть ещё одно число, кратное 3. У него уже сумма цифр не равна 3, что следует из соображений делимости на 9. Действительно, раз у последнего числа n сумма цифр равна 3, то число при делении на 9 даёт в остатке 3. В этом случае число $n - 3$ из списка кратно 9, и его сумма цифр тоже (ср. пример с числом 18). Такое число не является простым.

3. Ответ: 14 красных карандашей.

   Синих карандашей не больше 16, а красных не больше 14. Всего карандашей 30, поэтому синих ровно 16, а красных ровно 14.

4. Ответ: 16 см.

   Подразумевается, что жук должен пройти по каждому из 12 рёбер куба. Сделать это, проходя каждое ребро однократно, он не может, так как в любой

вершине сходится нечётное число рёбер, а он должен в каждую вершину зайти столько же раз, сколько выйти из неё. Поэтому на каждую вершину должно прийтись прохождение ещё хотя бы одного ребра. Каждое ребро может в этом смысле подойти для двух вершин, а всего их 8, то есть нужно как минимум 4 дополнительных ребра к предыдущим 12. Итого получается 16 см. Такой маршрут легко строится.

5. Ответ: да, можно.

   Заметим, что сумма всех чисел от 1 до 15 равна 120. Поэтому в каждой из строк сумма должна быть равна 40, а в каждом из столбцов должна быть сумма 24. Один из возможных примеров указан на рисунке:

1	3	8	13	15
9	11	12	6	2
14	10	4	5	7

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

8 класс (решения)

1. Ответ: 11.

   Число 11 представить нельзя, что проверяется непосредственно. А любое число $n \geq 12$ (не обязательно простое) можно представить в виде суммы двух составных одним из трёх способов: $n = 4 + (n-4)$; $n = 6 + (n-6)$; $n = 8 + (n-8)$ — в зависимости от остатка от деления на 3, равного 1, 0, 2 соответственно. Второе слагаемое будет кратно 3, и при этом не равно 3.

2. Ответ: 10 вариантов.

   Предположим, что Петя забыл две симметричные друг другу цифры — например, первую и последнюю. Он знает их сумму, равную k. Из сказанного выше следует, что максимальное количество вариантов достигается при $k = 9$, и оно равно 10.

   Теперь рассмотрим случай, когда забыты две не симметричные цифры — например, первая и вторая (остальные варианты аналогичны). Тогда у этих чисел известна разность, и если первая цифра задана, то вторая определяется однозначно. Поэтому и здесь имеется не более 10 вариантов.

3. Ответ: да, можно.

   Пусть точные квадраты равны a^2, b^2, c^2, d^2. Складывая суммы во всех тройках, мы получим утроенную сумму S четырёх исходных чисел, поэтому сумма чисел четвёрки равна $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}$. Тогда число, не входящее в первую тройку, равно $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3} - a^2 = \frac{-2a^2+b^2+c^2+d^2}{3}$, и аналогично для остальных чисел.

   Если $a > b > c > d$, то должно быть $2a^2 > b^2+c^2+d^2$, чтобы все числа четвёрки оказались положительны. Если из чисел четвёрки ровно одно делится на 3, то все частные здесь окажутся целыми.

   Те числа, которые приведены в условии, получаются для случая $a = 11$, $b = 10$, $c = 9$, $d = 8$. Если взять $a = 13$, $b = 12$, $c = 11$, $d = 10$, то по указанной формуле можно найти исходные числа. Это будут 9, 34, 57, 78. Таких примеров можно придумать бесконечно много.

4. Ответ: $a \in [-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}]$.

   Надо записать неравенства без знака модуля. Получится $-1 \leq a + b \leq 1$ и $-2 \leq a - 3b \leq 2$. Запишем их так, чтобы посередине в обоих случаях было b, то есть $-1-a \leq b \leq 1-a$ и $\frac{a-2}{3} \leq b \leq \frac{a+2}{3}$. Из них по свойствам неравенств следует, что $-1 - a \leq \frac{a+2}{3}$ и $\frac{a-2}{3} \leq 1 - a$. После упрощений получается $a \in [-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}]$.

   Эти условия необходимы для того, чтобы выполнялись оба неравенства из условия (при некотором b). Они же достаточны, так как отрезки $[-1 - a; 1 + a]$ и $[\frac{a-2}{3}; \frac{a+2}{3}]$ будут иметь непустое пересечение.

5. Ответ: 512 способов.

   Задачу можно решить для общего случая, то есть для доски $n \times n$.

   Все n клеток на диагонали принадлежат разным прямоугольникам, то есть их всего не меньше n. Поскольку площади попарно различны, суммарная площадь не меньше $1 + 2 + \cdots + n$, но она именно такая и есть, откуда следует, что разбиение осуществляется на прямоугольники площади 1, 2, ... , n.

   Прямоугольник, содержащий правую нижнюю клетку, содержит также одну из диагональных клеток. Если его удалить, то получается две фигуры, соответствующие числам m и k, где $m + k \leq n - 1$. Если ни одно из этих чисел не равно нулю, то значения площадей повторятся. Значит, отрезаемый прямоугольник имеет размер $1 \times n$, и находится либо снизу, либо справа. Отрезая его, получаем ту же задачу для числа $n - 1$. Это значит, что число способов разбиения удваивается, то есть оно равно 2^{n-1}.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: $12,5\%$.

   Пусть изначально было 20 условных единиц фруктов. Тогда овощей было 80 у.е. После увеличения на 40% произойдёт умножение на 1,4, и получится 112 у.е. овощей. Соответственно, количество фруктов уменьшится на 1/5 (это 20%), и оно станет равно 16 у.е.

   Итого получается $112+16=128$, а фрукты составляют 16 от этого количества. Значит, надо разделить 16 на 128 и умножить на 100%. Это будет $100\% : 8 = 12,5\%$.

2. Ответ: нет, не могла.

   Максимальное число очков равно 51 — при условии, что команда всех победила. Набрать 50 очков нельзя, так как невозможно потерять ровно одно очко: при ничьей теряется два. Тогда, если у обладателя второго места 49 очков, то победитель набрал 51 и выиграл в том числе у второй команды. Но тогда она набирает не больше 48 очков.

3. Ответ: $\frac{81}{97}$.

   Пусть $\frac{m}{n} > \frac{5}{6}$. Тогда $\frac{m}{n} - \frac{5}{6} = \frac{6m-5n}{6n} \geq \frac{1}{6n}$. Рассмотрим случай, когда $6m-5n=1$. Это значит, что $n-1$ делится на 6. Максимальное значение n равно 97, и для него $m=81$. Дробь $\frac{81}{97}$ даёт разность $\frac{1}{582}$. Меньшего значения не достичь, так как при $6m-5n \geq 2$ получается как минимум $\frac{1}{3n}$, что больше $\frac{1}{300}$.

4. Ответ: $14+6\sqrt{5}$.

   Угол D прямой, поэтому он опирается на диаметр AC. По этой причине B тоже прямой. Тогда у треугольника ABC катеты имеют длины $3x$ и $4x$, а гипотенуза AC равна 10. По теореме Пифагора получается $AB=6$ и $BC=8$. Площадь ABC равна 24, и на площадь ADC приходится 20.

   Опустим из точки D высоту DH на гипотенузу AC. Площадь равна $20 = \frac{1}{2}DH \cdot AC = 5DH$, откуда $DH=4$. Пусть O – центр окружности. С учётом

$OD = 5$, по теореме Пифагора имеем $OH = 3$, откуда расстояние от H до одной из вершин равно $5-3=2$, а до другой оно равно 8. Из этих соображений находим катеты AD и CD: их длины равны $\sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ и $\sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}$.

Складывая длины всех сторон, получаем значение периметра $14 + 6\sqrt{5}$.

5. Ответ: да, всегда.

Упорядочим числа по возрастанию. Рассмотрим три самых больших, и наименьшее из них обозначим через n. Следующие за ним числа не меньше $n+1$ и $n+2$ соответственно. Сумма трёх чисел не меньше $3n+3$. Если $n \geq 16$, то она не меньше 51, то есть больше 50.

Предположим, что $n < 16$. Тогда это число не больше 15, а предыдущие четыре числа не больше 14, 13, 12, 11 соответственно. Значит, в сумме они дают не больше 50, и тогда оставшиеся три наибольших числа в сумме дают больше 50.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: да, всегда.

   Делимость на 210 означает делимость на 2, 3, 5, 7 одновременно. По условию, для каждого из 17 чисел найдётся $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ такое, что число не делится на p. Сопоставим каждому из 17 чисел наименьшее p с этим свойством. Тогда получится ситуация "17 зайцев в 4 клетках" , и по принципу Дирихле, в какой-то из клеток окажется не менее 5 зайцев. В самом деле, если в каждой из 4 клеток не больше 4 зайцев, то всего их не больше 16.

   Рассмотрим 5 чисел, которые не делятся на одно из значений p. Тогда их произведение тоже не делится на p, то есть не делится и на 210.

2. Сравним между собой две монеты. Если одна перевесит, то она фальшивая. Тогда останется за 2 взвешивания найти фальшивую среди трёх, а это легко. Если монеты в равновесии, то сравним другую пару монет. Допустим, что одна из них перевесит. Тогда одну фальшивую монету мы знаем, а вторая — это самая последняя, которую мы не взвешивали. Если и во втором взвешивании будет равновесие, то в одном случае были две настоящие, а в одном две фальшивые. Третьим взвешиванием сравниваем одну монету из первой группы и одну из второй, в результате чего всё выясняется.

3. Пусть $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Ясно, что $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$.

   Сравним соседние члены. Можно заметить, что $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n} + (\frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+2n}) + \frac{1}{(n+1)^2}$. В скобки взято $2n$ слагаемых, каждое из которых не меньше последнего из них. Поэтому сумма в скобках не меньше $\frac{2}{n+2} \geq \frac{1}{n}$ при $n \geq 2$. Таким образом, последовательность возрастает, и все остальные её члены также больше 1.

4. Ответ: 26°.

   Угол при вершине B равнобедренного треугольника равен $180 - 2 \cdot 41 = 98$ градусам, что вдвое больше угла AMC. Проведём окружность с центром B радиусом $BA = BC$. Тогда вписанные углы, опирающиеся на дугу величиной

98 градусов, равны половине величины этой дуги. Среди таких углов находится и AMC, поэтому точка M лежит на окружности. Если бы она лежала вне круга, угол бы уменьшился, а если бы внутри, то увеличился.

Итак, $BM = BA$, и тогда угол MAB равен AMB, то есть 15 градусам. Поскольку отрезки AM и BC пересекаются, луч AM проходит внутри угла BAC величиной 41 градус, деля его на углы 15 и 26 градусов. Отсюда $\angle MAC = 26°$.

5. Ответ: при $n = 15$.

Рассмотрим следующую таблицу, в которой все числа не превышают 15, а произведения чисел во всех строках и солбцах равны 360:

10	3	12
4	15	6
9	8	5

Докажем, что значение $n = 15$ является наименьшим.

Допустим, что можно обойтись числами от 1 до 14. Заметим, что произведение всех использованных чисел является кубом натурального числа как произведения трёх одинаковых произведений по строкам (в примере выше это 360^3). Посмотрим, какие из простых чисел могут быть делителями этого куба. Не может встретиться 7, так как оно является делителем только двух чисел: 7 и 14, поэтому 7^3 в произведении не возникает. По этой же причине не может встретиться 5, так как 15 мы убрали, и остались только 5 и 10. Они тоже встретиться не могут. Также очевидно, что ни 11, ни 13 не могут быть использованы. Таким образом, из 14 возможных чисел мы уже отвергли 6, то есть девяти различных для заполнения квадрата не осталось.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

11 класс (решения)

1. Ответ: да, верно.

   Ввиду того, что $\sin 3x \geq -1$, $\cos 8x \geq -1$, нестрогое неравенство верно всегда. Если строгое неравенство не выполняется, то это возможно лишь в одном случае: $\sin 3x = -1$, $\cos 8x = -1$. Из первого условия имеем $3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k целое. Тогда $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$. Из второго условия получается, что $8x = \pi + 2\pi m$, где m целое, то есть $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}$.

   Приравниваем оба выражения для x, сокращаем на π, домножаем на 24. Получается $-4 + 16k = 3 + 6m$. Ясно, что такое равенство не может иметь места, так как левая часть чётна, а правая нечётна.

2. Ответ: два корня: $x \in \{-1; 4\}$.

   Два корня легко находятся подбором: $x = -1$, $x = 4$. Многочлен 4-й степени $(x-1)^4 - x^3 - 17$ делим на $x+1$ и на $x-4$ (столбиком, или при помощи схемы Горнера). Получается квадратный трёхчлен. Возникает уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое действительных корней не имеет.

3. Это утверждение равносильно тому, что 99...9 делится на 3^{n+2} (оба числа домножили на 9). А число из k девяток – это $10^k - 1$, где $k = 3^n$.

   Рассуждаем по индукции. При $n = 1$ имеем число 999, и оно кратно 27. Пусть $n > 1$, и утверждение для меньшего значения параметра, равного $n - 1$, уже доказано. Это значит, что $10^{3^{n-1}} - 1$ кратно 3^{n+1}. Рассмотрим число $10^{3^n} - 1 = a^3 - 1$, где $a = 10^{3^{n-1}}$. Согласно известной формуле, $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$. Первый сомножитель делится на 3^{n+1} по предположению индукции, и нам достаточно доказать, что второй сомножитель делится на 3. Тогда окажется, что всё произведение кратно 3^{n+2}. Заметим, что $a - 1$ делится в том числе и на 3, поэтому a при делении на 3 даёт в остатке 1. Это же верно для числа a^2, а тогда сумма трёх чисел с остатком 1 у каждого, делится на 3, что и требовалось.

4. Ответ: $48\sqrt{3} - 72 \approx 11,138$.

   Если расположить один шар в центре, а остальные 8 вписать в трёхгранные углы у вершин, то при рассмотрении большой диагонали куба становится ясно, что подходят шары радиусом r, где $2r\sqrt{2} + 4r = 24\sqrt{3}$, то есть $r = \frac{12\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. Значение диаметра при этом равно $d = 24\sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 48\sqrt{3}-72$.

   Докажем, что это значение радиуса является наибольшим. Пусть 9 шаров радиусом r помещены в коробку. Тогда их центры удалены от граней на расстояние не менее r, то есть они все принадлежат кубу с ребром $24 - 2r$. Разделим этот куб на 8 равных кубиков со стороной $12 - r$. Ввиду того, что точек у нас 9, по принципу Дирихле найдутся две точки, принадлежащие одному из этих кубиков. Тогда расстояние между ними не превосходит $(12-r)\sqrt{3}$, но оно не должно быть меньше $2r$. Отсюда вытекает неравенство $(12 - r)\sqrt{3} \geq 2r$, равносильное $r \leq \frac{12\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$, из чего следует максимальность.

5. Ответ: $15°$.

   На продолжении отрезка AC за точку C отметим точку F такую, что $CF = BE$. Тогда треугольники ABE и DCF равны по двум сторонам и углу между ними. В частности, $AE = DF$. Отсюда $BD = DF$ (по условию). Но треугольник BFD симметричен относительно диагонали квадрата, поэтому $BF = DF$. Значит, у этого треугольника все стороны равны, поэтому углы равны 60 градусам. В частности, такова величина угла BDF. Поэтому на CDF приходится $60 - 45 = 15$ градусов, а угол BAE ему равен.