Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

5 КЛАСС

1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 12 так, чтобы любые два соседних числа отличались или на 2, или на 3?

2. У Гены есть 50 ящиков, пронумерованных числами от 1 до 50. Из них 49 пусты, а в одном лежат апельсины. Чебурашка получит апельсины, если отгадает, в каком из ящиков они лежат. Для этого он может написать пачку записок с вопросами, требующими ответа «да» или «нет». Гена перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Как узнать наверняка, в каком из ящиков лежат апельсины? Какое наименьшее количество записок для этого нужно?

3. Можно ли клетчатую доску 5×5 замостить плитками 1×3 и 1×4?

4. На столе выложены в ряд игрушки четырёх цветов: красного, синего, зелёного, жёлтого. Известно, что для любых двух различных цветов найдутся две игрушки этих цветов, расположенные рядом. Какое наименьшее число игрушек могло быть выложено?

5. Можно ли таблицу 2×4 заполнить натуральными числами от 1 до 8 так, чтобы суммы чисел в строках были равны между собой, и суммы чисел в столбцах были равны между собой?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

6 КЛАСС

1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 16 так, чтобы любые два соседних числа отличались или на 2, или на 3?

2. Сколько можно составить различных равнобедренных треугольников с целочисленными сторонами, периметр которых равен 100?

3. За завтраком 7 гномов сидели за круглым столом. За обедом они хотят сесть за этот же стол так, чтобы количество сидящих между каждыми двумя гномами поменялось. Получится ли у них это сделать?

4. На столе выложены в ряд игрушки пяти цветов: красного, синего, зелёного, жёлтого, белого. Известно, что для любых двух различных цветов найдутся две игрушки этих цветов, расположенные рядом. Какое наименьшее число игрушек могло быть выложено?

5. Можно ли в квадрате 5×5 покрасить 8 клеток так, чтобы у каждой покрашенной клетки оказалось ровно 3 непокрашенных соседних клетки? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

7 КЛАСС

1. Имеется 7 прямоугольных плиток размеров 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6, 1×7. Можно ли, используя все эти плитки, сложить из них два прямоугольника одинаковой площади, но разного периметра?
2. Натуральное число назовём хорошим, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество хороших чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?
3. В коробке лежат 30 карандашей красного и синего цвета. Среди любых 17 карандашей есть хотя бы один красный, а среди любых 15 карандашей есть хотя бы один синий. Сколько красных карандашей в коробке?
4. Чему равна длина самого короткого пути жука вдоль ребер куба со стороной 1 см, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине?
5. Можно ли таблицу 3×5 заполнить натуральными числами от 1 до 15 так, чтобы суммы чисел в строках были равны между собой, и суммы чисел в столбцах были равны между собой?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

8 КЛАСС

1. Какое наибольшее простое число нельзя представить в виде суммы двух составных?

2. Пин-код телефона состоит из 4 цифр (и может начинаться с нуля: например, 0951). Петя называет «счастливыми» такие пин-коды, у которых сумма крайних цифр равна сумме средних, например 7351: 7+1=3+5. В своем телефоне он использует только «счастливые» пин-коды. Петя говорит, что даже если забудет одну цифру (но будет помнить её позицию), то он легко её восстановит. А если он забудет две цифры (но будет помнить их позиции), то ему придется перебрать лишь небольшое количество пин-кодов.

   Сколько пин-кодов придется перебрать Пете в худшем случае?

3. Числа 1, 22, 41, 58 обладают тем свойством, что сумма любых трёх из них — точный квадрат. Можно ли придумать ещё какую-нибудь четвёрку попарно различных натуральных чисел с таким свойством, которая не была бы пропорциональна уже предъявленной?

4. Какие значения может принимать a, если $|a+b| \leq 1$ и $|a-3b| \leq 2$?

5. Рассмотрим клетчатый квадрат размером 10×10, проведём в нем диагональ из левого нижнего угла в правый верхний и выкинем все клетки, лежащие выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить оставшуюся фигуру на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

9 КЛАСС

1. В результате реструктуризации импорта на складе торговой сети овощей стало на 40% больше, а фруктов — на 20% меньше. Требуется определить, сколько процентов фруктов стало на складе, если до реструктуризации их было 20%.

2. В чемпионате России по футболу участвуют 18 команд. За победу в матче даётся 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. В первом круге каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Оказалось, что все команды набрали разное количество очков. Могла ли команда, занявшая в первом круге второе место, набрать 49 очков?

3. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найти наименьшую дробь, большую, чем $\frac{5}{6}$.

4. В окружность радиуса 5 вписан четырёхугольник $ABCD$, у которого угол D прямой, $AB : BC = 3 : 4$. Найти периметр четырёхугольника $ABCD$, если его площадь равна 44.

5. На доске написано семь натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Известно, что сумма всех написанных чисел больше 100. Всегда ли можно указать три числа из семи, сумма которых больше 50?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

10 КЛАСС

1. Дано 17 натуральных чисел, среди которых никакое не делится на 210. Всегда ли можно указать 5 из этих чисел, произведение которых не будет делиться на 210?

2. Есть пять монет, из них две фальшивые, которые весят больше настоящей. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивые монеты.

3. Доказать, что при $n > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

4. Дан равнобедренный треугольник ABC с вершиной B и углом при основании $41°$. Точка M такова, что отрезки AM и BC пересекаются, угол AMB равен $15°$, угол AMC равен $49°$. Найти величину угла MAC.

5. В клетки квадрата 3×3 нужно вписать девять попарно различных натуральных чисел так, чтобы они были не больше n, и чтобы произведения чисел во всех строках и столбцах были одинаковы. При каком наименьшем n это возможно?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2017 – 2018 учебный год

11 КЛАСС

1. Верно ли, что для любого x верно строгое неравенство
$$5\sin 3x + 2\cos 8t + 7 > 0?$$
2. Решить уравнение $(x-1)^4 - x^3 = 17$.
3. Доказать, что число, составленное из 3^n единиц, делится на 3^n.
4. Каков наибольший диаметр шара, если в коробке $24 \times 24 \times 24$ помещается 9 таких шаров?
5. Дан квадрат $ABCD$. Точка E внутри угла CAB такова, что $AE = BD$ и BE перпендикулярно BD. Найти угол BAE.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35